Test 1 – Sujet B

Résoudre **un seul** exercice entre les deux proposés ci-dessous.

Exercice 1 (Nombres complexes)

(i) Calculer les opérations suivantes :

$$(7+i) + (3-i)\ , \quad (7+i)(3-i)\ , \quad \frac{7+i}{3-i}\ .$$

Dessiner les résultats dans le plan complexe.

(ii) Résoudre l'équation complexe suivante :

$$z^2 - 10\,z + 22 - 4i = 0\,.$$

(iii) Factoriser en polynômes complexes irréductibles le polynôme X^2+9.

Exercice 2 (Combinaisons linéaires) Soient $\overrightarrow{u} = (2,1,1)$ et $\overrightarrow{v} = (3,2,1)$.

(i) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{E} = (4,3,1)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(ii) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{F} = (5,1,2)$ ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Après, calculer le produit scalaire entre $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$.

(iii) Dire pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ le vecteur $\overrightarrow{G} = (x,1,2)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Test 1 – Sujet B

NOM et PRÉNOM (lisibles) :

Résolution de l'exercice

Test 1 – Sujet B

Corrigé du test

Exercice 3 (Nombres complexes)

(i) On trouve $(7+i)+(3-i)=10$ et $(7+i)\,(3-i)=22-4i$. De plus, on a

$$\frac{7+i}{3-i} = \frac{(7+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \ldots = 2+i.$$

(ii) On applique la formule pour la résolution des équations du deuxième degré, après avoir noté que

$$\Delta = \delta^2 = 12+16i \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = 4+2i$$

(pour cela, on résout $(a+ib)^2 = 12+16i$). Finalement, on trouve $z_1 = 7+i$ et $z_2 = 3-i$.

(iii) Par la loi de la différence des carrés, on a $X^2+9 = (X+3i)\,(X-3i)$.

Exercice 4 (Combinaisons linéaires)

(i) En écrivant $\overrightarrow{E} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, avec α et β réels, on se ramène au système

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=4 \\ \alpha+2\beta=3 \\ \alpha+\beta=1\,. \end{cases}$$

On obtient que la solution est donnée par $\alpha=-1$ et $\beta=2$.

(ii) En raisonnant comme dans le point (i), on arrive à résoudre

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=5 \\ \alpha+2\beta=1 \\ \alpha+\beta=2\,. \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solutions : les deux dernières équations donnent $\alpha=3$ et $\beta=-1$, mais ces valeurs ne vérifient pas la première équation.
On a $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{F} = 4\cdot5+3\cdot1+1\cdot2 = 25$.

(iii) Comme dans le point précédent, on doit résoudre

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=x \\ \alpha+2\beta=1 \\ \alpha+\beta=2\,. \end{cases}$$

Encore une fois, les deux dernières équations donnent $\alpha=3$ et $\beta=-1$. En introduisant ces valeurs dans la première équation, on trouve finalement $x=3$.